Análisis Matemático

Evaluación 1

Desigualdades y números complejos - Soluciones

Ejercicio 1. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log\big(|x-6|(1+|x-3|)\big)}$.

Solución. Este ejercicio estaba incluido en la primera relación de ejercicios para hacer en casa que entregasteis el día 13 de octubre. Las soluciones detalladas de los ejercicios de dicha relación las puse en el SWAD la semana anterior al examen, por lo que la solución de este ejercicio debía ser conocida por todos. Para mi sorpresa, muy pocos lo habéis hecho bien. Muchos de vosotros hacéis números, sin saber qué es lo que estáis haciendo, tratando de obtener un resultado que recordáis. Eso no sirve para nada. Yo valoro que sepas explicar lo que haces y me doy cuenta enseguida de si lo que escribes lo entiendes o no. No sirve de nada leer la solución de un ejercicio sin entender lo que se hace. Después de leer la solución debes hacerlo tú para comprobar si lo has entendido.

Ejercicio 2. Estudia para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad:

$$\left|2x^2 - 6x - 8\right| > x^2 - 1.$$

Solución. Esta desigualdad puede hacerse de muchísimas formas. La más inmediata es estudiar el signo del trinomio $h(x) = 2x^2 - 6x - 8$, algo que hemos hecho repetidas veces en clase. Las raíces de dicho trinomio son -1 y 4. Como el coeficiente de x^2 es positivo, deducimos que $h(x) > 0$ para $x < -1$ y para $x > 4$; y $h(x) \leqslant 0$ para $-1 \leqslant x \leqslant 4$.

- Para $-1 \leqslant x \leqslant 4$ la desigualdad del enunciado es:

$$-2x^2 + 6x + 8 > x^2 - 1 \Longleftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 < 0 \Longleftrightarrow 3(x+1)(x-3) < 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 3.$$

- Para $x < -1$ o para $x > 4$ la desigualdad del enunciado es:

$$2x^2 - 6x - 8 > x^2 - 1 \Longleftrightarrow x^2 - 6x - 7 > 0 \Longleftrightarrow (x+1)(x-7) > 0 \Longleftrightarrow x < -1 \text{ o } x > 7.$$

Concluimos que la desigualdad del enunciado se verifica para $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 3[\cup]7, +\infty[$. ☺

Ejercicio 3. Calcula los números complejos $z = x + iy$ para los que se verifica que el número complejo

$$w = \frac{iz - 1}{z - i}$$

es:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

c) Un número de módulo 1.

Solución. Tenemos que:

$$w = \frac{ix - (y+1)}{x + i(y-1)} = \frac{(ix - (y+1))(x - i(y-1))}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{-2x}{x^2 + (y-1)^2} + i\,\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}.$$

Por tanto:

a) w es real cuando $x^2 + y^2 - 1 = 0$, es decir, z está en la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Equivalentemente, $|z| = 1$.

b) w es imaginario puro cuando $x = 0$, es decir, $z \in i\mathbb{R}$.

c) Tenemos que

$$|w| = \frac{|ix - (y+1)|}{|x + i(y-1)|} = \frac{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}.$$

Deducimos que:

$$|w| = 1 \Longleftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 \Longleftrightarrow 2y = -2y \Longleftrightarrow y = 0.$$

☺

Ejercicio 4. Calcula todas las soluciones de la ecuación:

$$z^4 + 2i\sqrt{3}\,z^2 - 4 = 0$$

Solución. Pongamos $w = z^2$. Tenemos que:

$$w^2 + 2i\sqrt{3}\,w - 4 = 0 \Longleftrightarrow w = \frac{-2i\sqrt{3} \pm \sqrt{(2i\sqrt{3})^2 + 16}}{2} = \frac{-2i\sqrt{3} \pm \sqrt{-12 + 16}}{2} = -i\sqrt{3} \pm 1.$$

Pongamos $w_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $w_2 = -1 - i\sqrt{3}$. Las soluciones de la ecuación son $z_1 = \sqrt{w_1}$, $z_2 = -z_1$, $z_3 = \sqrt{w_2}$ y $z_4 = -z_3$. Todo lo que hay que hacer es calcular el valor principal de las raíces cuadradas de w_1 y w_2. Tenemos que $|w_1| = |w_2| = 2$. Además:

$$\arg(w_1) = \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \quad \arg(w_2) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Por tanto:

$$z_1 = \sqrt{2}\big(\cos(-\pi/6) + i\,\operatorname{sen}(-\pi/6)\big) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right).$$

$$z_3 = \sqrt{2}\big(\cos(-\pi/3) + i\,\operatorname{sen}(-\pi/3)\big) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

☺

Comentarios. Los fallos son tantos y tan variados que recogerlos todos me llevaría demasiado tiempo, si quieres saber en qué te has equivocado me tienes a tu disposición en las horas de tutoría. Llama la atención la enorme dificultad que tenéis casi todos para calcular las raíces de una ecuación de segundo grado. Más de la mitad os equivocáis al hacerlo. Muchos creéis que hay raíces cuadradas positivas y negativas de números complejos. Pues no, eso está todavía por inventar. El símbolo $+$ delante de una raíz jamás debe escribirse, no significa nada e indica que tienes ideas muy confusas. Podemos escribir $\pm$ delante de una raíz cuadrada para indicar que estamos considerando los dos valores de la misma, el principal y su opuesto, pero eso no quiere decir que uno de ellos sea positivo y otro negativo: no hay números complejos positivos ni negativos.

He repetido en clase varias veces que para calcular el módulo de un complejo $z = a + ib$ no se debe caer en el error de calcular $\sqrt{a^2 + (ib)^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$. Pues parece que muchos no lo han oído.

Indica un gran despiste tratar de resolver ecuaciones de la forma $f(x, y) = 0$. Eso, casi nunca puede hacerse. Una igualdad del tipo $f(x, y) = 0$ representa una curva en el plano formada por los infinitos puntos que satisfacen dicha ecuación (que se llama *ecuación implícita* de la curva).

Muchos os equivocáis al copiar los ejercicios, eso es falta de atención.